Appendice C

Genius is one percent inspiration, ninety-nine percent perspiration.
Il genio è per l'1% ispirazione e per il 99% sudore.
Thomas Alva Edison (1847 – 1931)

Nuovi esercizi proposti

Capitolo 1

Esercizio 1.1

Dire quali dei seguenti insiemi sono vuoti, finiti o infiniti.

1. l'insieme delle vocali nella parola *aiuole*;
2. l'insieme dei numeri interi contemporaneamente pari e dispari;
3. l'insieme dei numeri naturali multipli di 3;
4. l'insieme delle 500 FIAT che superano i 300 Km/h .

Soluzioni:

1. {a,i,u,o,e} quindi l'insieme è finito;
2. $\emptyset$;
3. {0,3,6,9,.....} quindi l'insieme è infinito;
4. $\emptyset$.

Esercizio 1.2: Rappresentare nei due modi possibili l'insieme A dei numeri naturali il cui quadrato è minore di 17.

Soluzione:

$A = \{0,1,2,3,4\}$; $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 17\}$.

Esercizio 1.3: Per ogni insieme B del seguente elenco, dare un insieme A tale che $B \subset A$.

B = {r,s,t} ;

B = {Vienna, Roma, Berlino} ;

B = {gatto, cane, cavallo} ;

B = {0,4,8,12} ;

B = {Fiorentina, Milan, Sampdoria} .

Soluzione: Ad esempio si può scegliere come insieme A:

B = {r,s,t} ; = A = {r,s,t,u,v,z} ;

B = {Vienna, Roma, Berlino} ; A = {Vienna, Roma, Berlino, Parigi} ;

B = {gatto, cane, cavallo} ; A = {gatto, cane, cavallo, delfino, mangusta} ;

B = {0,4,8,12} ; A = {0,2,4,6,8,10,12} ;

B = {Fiorentina, Milan, Sampdoria} ; A = {Fiorentina, Milan, Sampdoria, Inter, Napoli} .

Esercizio 1.4: Considerare i seguenti insiemi:

A = {20,30,40, 53} ;

B = {20, 72} ;

C = {20, 53, 72, 3214} ;

D= {20} .

Dire quali delle seguenti relazioni sono vere:

1. $B \subset A$
2. $D \subset A$
3. $C \supset B$
4. $C \supset D$

Soluzione:

1. $B \subset A$ Falsa
2. $D \subset A$ Vera
3. $C \supset B$ Falsa
4. $C \supset D$ Vera

Esercizio 1.5: Siano A e B due insiemi così definiti:

$$A = \{ x \in \mathbb{N} \mid 3x < 22 \}, \quad B = \{ x \in \mathbb{N} \mid x \text{ è un multiplo di } 4\}.$$

Determinare $A \cap B$, $A - B$.

Soluzione:
Abbiamo che A contiene i numeri x tali che $3x < 22$, cioè $x < 22/3$. Quindi $A = \{0,1,2,\ldots,7\}$.
B sarà dato dai numeri naturali multipli di 4 e quindi $B = \{0,4,8,12,16,\ldots\}$.
Allora $A \cap B = \{0,4\}$, $A - B = \{1,2,3,5,6,7\}$.

Esercizio 1.6: Siano A e B due insiemi così definiti:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ è pari}\}, \quad B = \{ x \in \mathbb{Z} \mid x^3 < 28\} .$$

Determinare $A \cap B$, $A - B$.

Soluzione:
Abbiamo che A contiene i numeri x che sono pari, quindi $A = \{0,2,4,6,8,\ldots\}$, mentre B sarà dato dai numeri naturali x tali che $x^3 < 28$, cioè $x < 4$, quindi $B = \{0,1,2,3\}$.
Allora $A \cap B = \{0,2\}$, $A - B = \{4,6,8,\ldots\}$.

Esercizio 1.7: Dire se le seguenti relazioni insiemistiche siano valide o meno:
$\{\pi ; -2{,}2 ; 14\} \subseteq \mathbb{Z}$; {balene} $\subseteq$ {mammiferi} ; {elicotteri} $\subseteq$ {velivoli} ; {ruote} $\subseteq$ {veicoli} .

Soluzione:
$\{\pi;-2{,}2;14\} \subseteq \mathbb{Z}$; **Falsa**. Infatti π e $-2{,}2$ non appartengono a $\mathbb{Z}$.
{balene} $\subseteq$ {mammiferi} ; **Vera.**
{elicotteri} $\subseteq$ {velivoli} ; **Vera**.
{ruote} $\subseteq$ {veicoli} ; **Falsa**.

Esercizio 1.8: Siano A = {Tutte le auto esistenti} , B = {Tutti i veicoli a benzina esistenti} ; dire che cosa contengono i seguenti insiemi: $A \cap B$, $A - B$, $B - A$.

Soluzione:
$A \cap B$ = {Tutte le auto a benzina esistenti} ;
$A - B$ = {Tutte le auto esistenti che non vanno a benzina } ;
$B - A$ = {Tutti i veicoli a benzina esistenti che non sono auto} .

Esercizio 1.9: Dire se le seguenti relazioni insiemistiche siano valide o meno:

$$A \times \{0\} = A \, ; \; A \times A = A \, ; \; A \cup B \subseteq A \; ; \; A \cup \varnothing = \varnothing \, .$$

Soluzione:
$A \times \{0\} = A$, **Falsa** ;
$A \times A = A$, **Falsa** ;
$A \cup B \subseteq A$, **Falsa** ;
$A \cup \varnothing = \varnothing$, **Falsa** .

Esercizio 1.10: Dire se quelle seguenti sono funzioni da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$:

$f(n) = n^2 - 1$; $f(n) = \pm(n-1)n$; $f(n) = n^3 - n$; $f(n) = -n$; $f(n) = -\ 1/n$.

Soluzione:
$f(n) = n^2 - 1$; $f(n) = n^3 - n$; $f(n) = -n$, Sono funzioni.
$f(n) = \pm(n-1)n$; $f(n) = -\ 1/n$, Non sono funzioni (la prima assume due valori diversi, la seconda non è definita, tranne che per $n = \pm 1$).

Capitolo 3

Esercizio 3.1: Calcolare il valore della seguente espressione:

$$\{[12-(10-8)^5 : 2^4] : 5\}^3 \ - \ 8\}$$

Soluzione: **0**

Esercizio 3.2: Calcolare il valore della seguente espressione:

$$(2\times 3)^3 \ : 36 + [5-(-9:3)]$$

Soluzione: **14**

Esercizio 3.3: Calcolare il valore della seguente espressione:

$$(81\times 27) : \{(4^3 : 4^2) + 5\times 5^2 - 12\times 5 + 12\}$$

Soluzione: **27**

Esercizio 3.4: Calcolare il triplo di 3^{15}

Soluzione: $3 \times 3^{15} = \mathbf{3^{16}}$.

Esercizio 3.5:
Trovare due numeri tali che la loro somma valga 18 e il prodotto 45

Soluzione: **3 e 15** .

Esercizio 3.6: Trovare mcm e MCD delle seguenti coppie di numeri:
1. (1245,345) ;
2. (6902,378) ;
3. (77,49) ;
4. (121, 33) ;
5. (1111, 5555) .

Soluzione:
1. MCD =**15** ; mcm = **28635**
2. MCD =**14** ; mcm = **186354**

3. MCD =**7**; mcm = **539**
4. MCD =**11** ; mcm = **363**
5. MCD =**1111** ; mcm = **5555**

Esercizio 3.7
Scrivere nelle basi: 5, 7, 10, 12, 13 e 15 il seguente numero (in base due): 1110111000_2

Soluzioni:
$1110111000_2 = 12302_5$
$1110111000_2 = 2530_7$
$1110111000_2 = 952_{10}$
$1110111000_2 = 674_{12}$
$1110111000_2 = 583_{13}$
$1110111000_2 = 437_{15}$

Esercizio 3.8: Dire quali dei seguenti numeri sono primi: 271; 369; 401; 510; 517; 863.

Soluzione:
217, 401, 863 .

Esercizio 3.9: Trovare la scomposizione in fattori primi dei seguenti numeri:
124; 322; 508; 645; 724; 888; 909

Soluzioni:
$124 = 2^2 \times 31$
$322 = 2 \times 7 \times 23$
$508 = 2^2 \times 127$
$645 = 3 \times 5 \times 43$
$724 = 2^2 \times 181$
$888 = 2^3 \times 3 \times 37$
$909 = 3^2 \times 101$

Esercizio 3.10: Trovare due numeri naturali tali che la loro somma valga 17 e il prodotto 60

Soluzione:
5 e 12 .

Capitolo 4

Esercizio 4.1: Calcolare il valore delle seguenti espressioni:
1. $\{[(4-2)^2-2] \times 2^3 - 2^3\}:(2^2 \times 2)$ =
2. $(21 \times 49):7^3 + [125:25 - 3^2 \times 9 + 3] = (3 \times 7 \times 7^2):7^3 + [5^3:5^2 - 3^2 \times 3^2 + 3] =$

Soluzioni:

1. $\{[(4-2)^2-2]\times 2^3-2^3\}:(2^2\times 2)=\{[4-2]\times 2^3-2^3\}:(2^3)=$
$=\{2^4-2^3\}:(2^3)=\{16-8\}:(2^3)=(2^3):(2^3)=\mathbf{1}$

2. $(21\times 49):7^3+[125:25-3^2\times 9+3]=(3\times 7\times 7^2):7^3+[5^3:5^2-3^2\times 3^2+3]=$
$(3\times 7^3):7^3+[5-3^4+3]=3+[5-81+3]=\mathbf{-70}$

Esercizio 4.2: Ordinare i seguenti numeri in ordine decrescente:
3^3 ; -1 ; $(-2)^6$; $-(-3)^4$; -12 ; 20 ; -7 ; 0

Soluzioni:
$(-2)^6 = 64$; $3^3 = 27$; 20; 0; -1; -7; -12; $-(-3)^4 = -81$.

Esercizio 4.3: Eseguire le seguenti divisioni con resto, indicando in ogni caso la coppia (q,r) risultante:
4:5 ; 5:4 ; (–8):8 ; 11:9 ; 6:5 ; (–1): 3 .

Soluzioni:
4:5 dà $(q,r) = (0,4)$;
5:4 dà $(q,r) = (1,1)$;
(–8):8 dà $(q,r) = (-1,0)$;
11:9 dà $(q,r) = (1,2)$;
6:5 dà $(q,r) = (1,1)$;
(–1): 3 dà $(q,r) = (-1,2)$.

Esercizio 4.4: Calcolare il MCD nei seguenti casi:
(258,56) ; (306,270) ; (3698,567) ; (912,198) ; (121,66) ; (644,780).

Soluzioni:
MCD(258,56) = 2 ; MCD(306,270) = 18 ; MCD(3698,567) = 1 ; MCD(912,198) = 6 ; MCD(121,66) = 11 ; MCD(644,780) = 4 .

Esercizio 4.5: Stabilire quali siano i numeri interi positivi che sostituiti a b rendano negativi i seguenti prodotti:
$3\times(b-5)$; $7\times(b+2)$; $(b-3)\times(b+5)$; $(5-b)^2\times(b-2)^4$

Soluzioni:
$b = 1,2,3,4$; Nessun b ; $b = 1,2$; Nessun b.

Esercizio 4.6: Un numero x diviso per 5 dà resto 4, diviso per 6 dà resto 2, diviso per 2 dà resto 0. Infine si sa che la somma di tali quozienti è pari a x, diminuito di 1. Quanto vale x?

Soluzione:

Avremo che: $x = 5a+4$; $x = 6b+2$; $x = 7c$; inoltre $a+b+c = x - 1$.
Allora $(x-4)/5 + (x-2)/6 + x/2 = x-1$, da cui si ricava $x = \mathbf{-1}$.

Esercizio 4.7: Io ho 58 anni e mio figlio 28; fra quanti anni la mia età sarà doppia della sua?

Soluzione:
Detto x il numero degli anni cercati, la soluzione del problema è la soluzione della seguente equazione di primo grado:

$$58 + x = 28\times 2$$
$$x = 56 - 58$$
$$x = -2$$

Quindi la mia età è stata doppia della sua due anni fa.

Esercizio 4.8: Trovare tutti i divisori (in $\mathbb{Z}$) del numero -24 .

Soluzione:
1 , 2 , 3 , 4 , 6 , 8 , 12 , 24 , –1 , –2 , –3 , –4 , –6 , –8 , –12 , –24 .

Esercizio 4.9: Se la temperatura massima odierna a Roma è di 16° e quella di Oslo è di –8°, qual è il dislivello termico fra le due capitali?

Soluzione:
Il dislivello è dato dalla differenza: $16 - (-8) = 24$ **.**

Esercizio 4.10: Eseguire le seguenti operazioni in $\mathbb{Z}_5$ ed in $\mathbb{Z}_6$:
$3 + 3$; $[(4 + 2) \times 3]^2$; $4 \times 2 - 1$; $[(3+2) + 3]^2 - 2$.
Soluzioni:
In $\mathbb{Z}_5$:
$3 + 3 = 1$; $[(4 + 2) \times 3]^2 = 3^2 = 4$; $4 \times 2 - 1 = 0$; $[(3+2) + 3]^2 - 2 = 2$
In $\mathbb{Z}_6$:
$3 + 3 = 0$; $[(4 + 2) \times 3]^2 = 0$; $4 \times 2 - 1 = 1$; $[(3+2) + 3]^2 - 2 = 2$

Capitolo 5

Esercizio 5.1:

1. $\left(\frac{1}{10} - 10\right) : \left\{\left[-\frac{1}{6} - \left(\frac{9}{4} + \frac{25}{2}\right)\right] - \left[-4 - \left(\frac{4}{5} - \frac{7}{3}\right)\right]\right\} =$
2. $\left\{\left[\frac{5}{6} - \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right)\right] : (-6)^{-1} + \frac{1}{2}\right\}^2 \times \frac{4}{11} =$
3. $\left[\left(-\frac{3}{4}\right)^2 \times \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(1 - \frac{1}{5}\right)^0 - \frac{3}{4}\right] \times 2^3 =$

4. $\left[(7-3)^3 \times 4^{-(5-3)^2} - \frac{1}{4}\right] \times \frac{5^2-3^2}{2^5} =$

Soluzioni:

Es. 1

$$\left(\frac{1}{10}-10\right):\left\{\left[-\frac{1}{6}-\left(\frac{9}{4}+\frac{25}{2}\right)\right]-\left[-4-\left(\frac{4}{5}-\frac{7}{3}\right)\right]\right\}=$$
$$=-\frac{99}{10}:\left\{\left[-\frac{1}{6}-\left(\frac{59}{4}\right)\right]-\left[-4-\left(-\frac{23}{15}\right)\right]\right\}=-\frac{99}{10}:\left\{\left[-\frac{179}{12}\right]-\left[\frac{37}{15}\right]\right\}=$$
$$=-\frac{99}{10}:\left\{\left[-\frac{1790+296}{120}\right]\right\}=-\frac{99}{10}\times\left(-\frac{120}{1494}\right)=\mathbf{\frac{66}{83}}$$

Es. 2

$$\left\{\left[\frac{5}{6}-\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)\right]:(-6)^{-1}+\frac{1}{2}\right\}^2\times\frac{4}{11}=\left\{\left[\frac{5-3+4}{6}\right]\times(-6)+\frac{1}{2}\right\}^2\times\frac{4}{11}=$$
$$=\left\{(-6)+\frac{1}{2}\right\}^2\times\frac{4}{11}=\left\{-\frac{11}{2}\right\}^2\times\frac{4}{11}=\mathbf{11}$$

Es. 3

$$\left[\left(-\frac{3}{4}\right)^2\times\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(1-\frac{1}{5}\right)^0-\frac{3}{4}\right]\times 2^3=\left[\frac{9}{16}\times\left(-\frac{1}{3}\right)+1-\frac{3}{4}\right]\times 2^3=$$
$$\left[\frac{9}{16}\times\left(-\frac{1}{3}\right)+1-\frac{3}{4}\right]\times 2^3=\left[\frac{-3+16-12}{16}\right]\times 2^3=\left[\frac{1}{16}\right]\times 8=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

Es. 4

$$\left[(7-3)^3\times 4^{-(5-3)^2}-\frac{1}{4}\right]\times\frac{5^2-3^2}{2^5}=\left[4^3\times 4^{-4}-\frac{1}{4}\right]\times\frac{25-9}{32}=\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right]\times\frac{16}{32}=\mathbf{0}$$

Esercizio 5.2:

Trasformare le seguenti frazioni in numeri decimali:

$\frac{3}{8};\frac{6}{45};\frac{1}{1000};\frac{37}{9};\frac{14}{5};\frac{23}{6};\frac{11}{2}.$

Soluzione:

$\frac{3}{8}=0{,}375$; $\frac{6}{45}=0{,}1\overline{3}$; $\frac{1}{1000}=0{,}001$; $\frac{37}{9}=4,\overline{1}$; $\frac{14}{5}=2{,}8$; $\frac{23}{6}=3{,}8\overline{3}$; $\frac{11}{2}=5{,}5$ **.**

Esercizio 5.3:

Determinare (in funzione di *n*) quel numero *x* tale che il suo quadrato è uguale al quadrato di *x*-2, aumentato di *n*.

Soluzione:

Avremo che: $x^2 = (x-2)^2 + n$; quindi $x^2 = (x^2 - 4x + 4) + n$; da cui $4x = 4+n$ e $x = (4+n)/4$.

Esercizio 5.4:

Il signor Pippo compra un tablet e dà 300€ come acconto. Poi si avvale di un finanziamento composto di 5 rate, in ognuna della quali versa 1/15 del prezzo totale del tablet. Quanto costa il tablet?

Soluzione:

Avremo che il prezzo del tablet risulta: $x = 300 + 5\times 1/15(x)$; $x = 300 + x/3$, e quindi $x - x/3 = 300$, cioè $2x/3 = 300$ e $x = 450$.

Esercizio 5.5:
In una classe elementare le femmine sono un terzo dei maschi più 2. In tutto gli allievi sono 30. Quanti sono i maschi e quante le femmine?

Soluzione:
Detto x il numero dei maschi, avremo che le femmine sono $x/3 + 2$. Poiché tutti gli allievi sono 30, avremo: $x + (x/3 + 2) = 30$, e cioè $4x/3 = 28$ e $x = 21$. Le femmine saranno $30 - 21 = 9$.

Esercizio 5.6:
Un commerciante di seta compra delle sciarpe, spedendo una certa somma e vuol ricavare dalla vendita i 5/4 di quanto investito. Sapendo che il guadagno è stato di 1400€, quanto son costate le sciarpe?

Soluzione:
Detto x il costo delle sciarpe, il ricavo sarà $5x/4$, e quindi il guadagno è di $5x/4 - x = x/4$, cioè $x/4 = 1400$, allora $x = 5600$€ .

Esercizio 5.7:
Dire se le seguenti proporzioni son vere o false:
50:25=2:1 ; 18:9=7:3 ; 14:7 = 4:7 ; 9:8=27:24 ; 56:64 = 14:16 ; 12:24 = 2:4 .

Soluzione:
50:25=2:1 , **Vera**. 18:9=7:3 , **Falsa**. 14:7 = 4:7 , **Falsa**. 9:8=27:24 , **Vera**. 56:64 = 14:16 , **Vera**.
12:24 = 2:4 , **Vera**.

Esercizio 5.8:
Da una cisterna si toglie la metà del suo contenuto, e poi se ne toglie un terzo ed infine altri 19 litri. Quello che rimane è un quinto del contenuto iniziale. Quanti litri conteneva la cisterna?

Soluzione:
Detto x il contenuto iniziale della cisterna, avremo:
$x - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + 3\right) = \frac{1}{15}x$; $x - \left(\frac{3x+2x+18}{6}\right) = \frac{1}{15}x$; $\frac{6x-5x-18}{6} = \frac{1}{15}x$; $\frac{x-18}{6} - \frac{1}{15}x = 0$; $\frac{5x-2x-90}{30} = 0$; $3x = 90$; $x = \mathbf{30}$.

Esercizio 5.9:
Dire se le seguenti disequazioni sono vere o false:

$\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$; $-100 > -8$; $-3 < -5$; $\frac{1}{6} > \frac{1}{2}$; $-\frac{1}{6} > -\frac{1}{2}$.

Soluzione:
$\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$ **Vera.** $-100 > -8$ **Falsa.** $-3 < -5$ **Falsa** . $\frac{1}{6} > \frac{1}{2}$ **Falsa.** $-\frac{1}{6} > -\frac{1}{2}$ **Vera.**

Esercizio 5.10:
Scomporre 90 nella somma di due numeri tali che uno sia un quarto dell'altro.

Soluzione:
Sia *x* uno dei due numeri, allora avremo che $x + x/4 = 90$; quindi $5x/4 = 90$ da cui $x = 90\times4/5$ **= 72** è il primo numero, mentre l'altro è 90 – 72 = **18**.

Capitolo 6

Esercizio 6.1:
Dire se i seguenti numeri sono razionali o irrazionali:
$\sqrt{220}$; $\sqrt{121}$; $\sqrt{81}$; $\frac{3\sqrt{64}}{8\sqrt{9}}$; $\frac{\sqrt[3]{125}}{25}$; $\sqrt{7}$; $\sqrt[4]{16}$.

Soluzione:
$\sqrt{220} = 2\sqrt{55}$, irrazionale;
$\sqrt{121} = 11$, razionale;
$\sqrt{81} = 9$, razionale ;
$\frac{3\sqrt{64}}{8\sqrt{9}} = 1$, razionale ;
$\frac{\sqrt[3]{125}}{25} = \frac{1}{5}$, razionale;
$\sqrt{7}$, irrazionale ;
$\sqrt[4]{16} = 2$, razionale.

Esercizio 6.2:
Dire se siano vere o false le seguenti uguaglianze (ove appaiano variabili *x,a,b* , con "vero" si intende che l'uguaglianza deve valere per ogni valore a loro attribuito).
$\sqrt{32x^5} = \sqrt{2^5x^5}$,
$\sqrt{49} = -7$,
$\sqrt{155} = 12$,
$\sqrt[3]{2^7x^6} = 2x\sqrt[3]{2}$,
$\sqrt[5]{a^{10}b^3c^8} = ac^2\sqrt[5]{b^3}$.

Soluzione:
$\sqrt{32x^5} = \sqrt{2^5x^5}$, vera.
$\sqrt{49} = -7$, falsa ($\sqrt{49} = 7$).
$\sqrt{155} = 12$, falsa.
$\sqrt[3]{2^7x^6} = 2x\sqrt[3]{2}$, falsa ($\sqrt[3]{2^7x^6} = 2^2x^2\sqrt[3]{2}$),
$\sqrt[5]{a^{10}b^3c^8} = ac^2\sqrt[5]{b^3}$ falsa ($\sqrt[5]{a^{10}b^3c^8} = a^2c\sqrt[5]{b^3c^3}$).

Esercizio 6.3:
Razionalizzare il denominatore delle seguenti frazioni:

$\frac{1}{\sqrt{7}}$; $\frac{4}{\sqrt{5}}$; $\frac{6}{\sqrt{2}}$; $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$; $\frac{1}{\sqrt[3]{7}}$.

Soluzione:

$\frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{7}$;

$\frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$;

$\frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$;

$\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{7}\ \sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{21}}{3}$;

$\frac{1}{\sqrt[3]{7}} = \frac{1}{\sqrt[3]{7}}\frac{\sqrt[3]{7^2}}{\sqrt[3]{7^2}} = \frac{\sqrt[3]{49}}{7}$.

Esercizio 6.4:

Semplificare al massimo le seguenti espressioni (supponendo *a,b,c* > 0):

$\sqrt[3]{125}$; $\sqrt[4]{16}$; $\sqrt{252}$; $\sqrt[4]{a^8b^4c^5}$; $\sqrt[3]{8a^3b^3}$; $\frac{\sqrt{49}}{\sqrt{7}}$; $\frac{\sqrt{81}}{6}$; $\frac{5}{\sqrt{25}}$; $\frac{\sqrt[3]{a^5bc}}{a}$

Soluzione:

$\sqrt[3]{125} = 5$;

$\sqrt[4]{16} = 2$;

$\sqrt{252} = \sqrt{36 \times 7} = 6\sqrt{7}$;

$\sqrt[4]{a^8b^4c^5} = a^2bc\sqrt{c}$;

$\sqrt[3]{8a^3b^3}$;

$\frac{\sqrt{49}}{\sqrt{7}} = \sqrt{7}$;

$\frac{\sqrt{81}}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$;

$\frac{5}{\sqrt{25}} = 1$;

$\frac{\sqrt[3]{a^5bc}}{a} = \frac{a\sqrt[3]{a^2bc}}{a} = \sqrt[3]{a^2bc}$.

Esercizio 6.5:

Dire se le seguenti uguaglianze siano vere o false:

$(a-2b)^2c = ca^2 - 4cab + 4b^2c$;

$(3a-2b)^2 - 6a^2 + 3ab = 3a^2 - 9ab + 4b^2$;

$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$;

Soluzione:

Le uguaglianze sono tutte vere.

Esercizio 6.6:

Ordinare in ordine crescente i seguenti numeri:

π ; $\sqrt{7}$; 7 ; $\sqrt[3]{-125}$; 1 .

Soluzione:
$\sqrt[3]{-125}$; 1 ; $\sqrt{7}$; π ; 7 .

Esercizio 6.7:
Dire se sia vera la seguente disuguaglianza:
$\sqrt[4]{2^3} > \sqrt{2^5}$.

Soluzione:
Falsa. Infatti vale: $2^{\frac{3}{4}} < 2^{\frac{5}{2}}$.

Esercizio 6.8:
Dire se sia vera la seguente disuguaglianza:
$\frac{1}{\sqrt[4]{2^3}} > \frac{1}{\sqrt{2^5}}$.

Soluzione:
Vera. Vedi l'esercizio precedente.

Esercizio 6.9:
E' corretta la seguente operazione in $\mathbb{R}$?
$\sqrt{4} + \sqrt{5} = \sqrt{9}$.

Soluzione:
NO. La somma di radici non è pari alla radice della somma.

Esercizio 6.10:
Calcolare la seguente espressione:
$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\frac{\sqrt{6}}{5} + \sqrt{3} + \sqrt{2} =$

Soluzione:
$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\frac{\sqrt{6}}{5} + \sqrt{3} + \sqrt{2} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{6}}{5} + \sqrt{3} + \sqrt{2} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}+5\sqrt{3}+5\sqrt{2}}{5} = \frac{6\sqrt{3}+6\sqrt{2}}{5} = \frac{6}{5}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right).$

Capitolo 7

Esercizio 7.1: Qual è la probabilità di ottenere almeno 2 teste lanciando 3 monete?

Soluzione:
Lanciando tre monete gli esiti possibili sono 8 :

TTT, TTC, TCT, CTT, TCC, CTC, CCT, CCC .

Fra questi, solo nei primi quattro si hanno almeno due teste, quindi la probabilità cercata è 4/8 = **1/2**.

Esercizio 7.2: Qual è la probabilità, lanciando 2 dadi, che uno di essi segni il doppio dell'altro?

Soluzione:

Gli esiti possibili lanciando due dadi sono 36. Fra questi, quelli ove un dado segna il doppio dell'altro sono: 1-2, 2-4, 3-6, 6-3, 4-2, 2-1. Quindi la probabilità cercata è 6/36 = **1/6**.

Esercizio 7.3: Qual è la probabilità, lanciando un dado rosso e uno verde, che quello rosso segni il doppio dell'altro?

Soluzione:

Gli esiti possibili lanciando due dadi sono 36. Fra questi, quelli ove il dado rosso segna il doppio dell'altro sono quelli per cui (R,V) = 6-3, 4-2, 2-1. Quindi la probabilità cercata è 3/36 = **1/12**.

Esercizio 7.4: In un'urna ci sono 15 palline rosse e 10 nere. Ne peschiamo 2. E' più facile che siano dello stesso colore o no?

Soluzione:

Ci sono 25 palline nell'urna, pescandone due il numero di pescate possibili è dato dalle combinazioni di due elementi in un insieme di 25, cioè:

$$\binom{25}{2} = \frac{25 \cdot 24}{2} = 300$$

Fra queste, quelle corrispondenti a una coppia di palline di colore diverso è data dal prodotto 15×10=150. Allora anche le coppie di palline di colore diverso saranno 300 – 150 = 150, cioè abbiamo le stesse probabilità (pari a 150/300 = 1/2) di pescare due palline di colore diverso o due dello stesso colore.

Notiamo che si poteva risolvere l'esercizio anche cercando per prima la probabilità di pescare due palline dello stesso colore; in quel caso abbiamo che le possibilità per due palline rosse sono:

$$\binom{15}{2} = \frac{15 \cdot 14}{2} = 105$$

Mentre le possibilità per due nere sono:

$$\binom{10}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$$

In tutto 105+45 = 150 possibilità per due palline dello stesso colore.

Esercizio 7.5: In un'urna ci sono 10 palline rosse, 10 nere e 2 bianche. Qual è la probabilità di estrarne 2 dello stesso colore? E' più o meno del 40%?

Soluzione:

Ci sono 22 palline nell'urna, pescandone due il numero di pescate possibili è dato dalle combinazioni di due elementi in un insieme di 22, cioè:

$$\binom{22}{2} = \frac{22 \cdot 21}{2} = 11 \times 21 = 231$$

Fra queste avremo

$$\binom{10}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$$

Coppie di palline rosse, altrettante di palline nere e solo una coppia di palline bianche, in tutto quindi 45+45+1 = 91 coppie di palline dello stesso colore. La probabilità cercata è **91/231**, pari a circa il 39,4%, e quindi **minore del 40%.**

Esercizio 7.6: Dire quale sia la probabilità di vincere al seguente gioco: da un'urna che ne contiene 12 pallina rosse, 21 blu ed una gialla si pescano due palline. Si vince se sono di colore diverso.

Soluzione:
Ci sono 34 palline nell'urna, pescandone due il numero di pescate possibili è dato dalle combinazioni di due elementi in un insieme di 34, cioè:

$$\binom{34}{2} = \frac{34 \cdot 32}{2} = 544$$

Le coppie di palline di colore diverso possono essere rosso-blu: 12×21 = 232, rosso-giallo: 12×1 = 12, blu-giallo: 21×1 = 21; quindi in tutto 265 coppie di colore diverso; la probabilità cercata è allora pari a **265/544** , pari a circa 0,487 e cioè al **48,7%** , meno della metà.

Esercizio 7.7: Estraete 2 numeri della tombola (in tutto sono 90), qual è la probabilità che siano due numeri consecutivi (come 3-4 o 27-28)? E' maggiore o minore del 2%?

Soluzione:
Ci sono 90 numeri, quindi il numero di pescate possibili è dato dalle combinazioni di due elementi in un insieme di 90, cioè:

$$\binom{90}{2} = \frac{90 \cdot 89}{2} = 4005$$

Le coppie formate da due numeri consecutivi saranno: 1-2, 2-3, 3-4,…, 89-90 e quindi sono 89 in tutto; la probabilità cercata è allora 89/4005 = **1/45** , pari a $0{,}0\overline{2}$ e quindi a circa il 2,2% , maggiore del 2%.

Esercizio 7.8: Lanciate un dado (normale, a sei facce) ed una moneta. Qual è la probabilità che otteniate un numero primo sul dado e contemporaneamente "testa" sulla moneta?

Soluzione:
Gli esiti possibili sono dati da tutte le coppie "faccia del dado"-"faccia della moneta", e sono quindi 6×2 = 12. I casi favorevoli sono dati dalle coppie: 2-T , 3-T, 5-T e quindi la probabilità è 3/12 = **1/4**.

Esercizio 7.9: Avete due gettoni, il primo riporta la lettera A su una faccia e la B sull'altra, il secondo la lettera B e la C. Qual è la probabilità, lanciandoli, di ottenere almeno una "B"? E quella di ottenere almeno una "A"?

Soluzione:
Gli esiti possibili sono 2×2 = 4. Nel primo caso gli esiti favorevoli sono A-B, B-B, B-C e quindi la

probabilità cercata è **3/4**. Nel secondo caso gli esiti favorevoli sono A-B e A-C, quindi la probabilità è 2/4 = 1/2.

Esercizio 7.10: Considerate due dadi a forma di icosaedro (con 20 facce). Che probabilità ho, lanciandoli, di ottenere come somma 15? E' maggiore o minore del 4%?

Soluzione:
Gli esiti possibili lanciando tali dadi sono 20×20 = 400. I casi favorevoli sono dati dalle seguenti coppie: 1-14 , 2-13 , 3-12 , 4-11 , 5-10 , 6-9 , 7-8 , 8-7 , 9-6 , 10-5 , 11-4 , 12-3 , 13-2 , 14-1 .
Quindi la probabilità cercata è 15/400 = **3/80**, pari al 3,75% (**minore del 4%**).

Esercizio 7.11: Ascanio e Astianatte sono entrambi nati a Luglio. Qual è la probabilità che abbiano lo stesso compleanno?

Soluzione:
Ci sono 31 giorni a luglio, quindi le possibili coppie di compleanni sono 31×31 = 961 . Tra queste, ce ne saranno 31 date da giorni uguali, quindi la probabilità è 31/961 = **1/31** .

Esercizio 7.12: Gli iscritti al corso di laurea di Scienze della Formazione Primaria di Novara sono 236 e il 75% di essi sono donne. Estraendo a caso i numeri di matricola di due di tali studenti, qual è la probabilità che siano entrambi maschi? Tale probabilità è maggiore o minore del 5%?

Soluzione:
Gli esiti possibili sono dati dalle coppie di due numeri di matricola su 236, cioè:

$$\binom{236}{2} = \frac{236 \cdot 235}{2} = 27730$$

Gli studenti maschi sono il 25% di 236, e cioè 59. Quindi le possibili coppie di due studenti di sesso maschile sono:

$$\binom{59}{2} = \frac{59 \cdot 58}{2} = 1711$$

La probabilità cercata è allora di 1711/27730 = **29/470**, pari a circa il 6,1% (maggiore del 5%).

Esercizio 7.13: Dire quale sia la probabilità di vincere al seguente gioco: si pescano due carte in un mazzo da quaranta, e si vince se sono dello stesso seme.

Soluzione:
Gli esiti possibili sono dati dalle coppie di due carte su 40, e quindi:

$$\binom{40}{2} = \frac{40 \cdot 39}{2} = 780$$

Per ogni seme ci sono

$$\binom{10}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$$

coppie di carte uguali, in tutto 45×4 = 180. La probabilità di vincere è quindi 45/780 = **3/52**.

Esercizio 7.14: In un laboratorio di ingegneria si effettuano diverse misurazioni della stessa barretta di acciaio; le misure rilevate (in *cm*) sono le seguenti:

10 ; 10,2 ; 10,1 ; 9,8 ; 9,9; 10,3 .

Dovendo assegnare un valore alla lunghezza della barretta, quale gli dareste?

Soluzione:
In questo caso il valore dato dalla media aritmetica (che è anche uguale alla mediana, mentre la moda non esiste) è appropriato: **10,05 *cm***.

Esercizio 7.15: Abbiamo le seguenti serie di dati:

Prima serie: 1 – 2 – 2 – 3 – 1 – 2 – 1 – 1 ; Seconda serie: 2 – 3 – 4 – 5 – 5 – 5 – 7 – 8 – 9

Per entrambe calcolare moda, mediana e media aritmetica. Valutare (usando gli scarti) se nei due casi le varie medie siano rappresentative o meno dei dati in oggetto.

Soluzione:
Per la prima serie si ha che la moda è 1, la mediana è 1,5 e la media è 13/8 = 1,625. In questo caso lo scarto è 5/8 = 0,625 sia per la moda che per la mediana e per la media, che risultano tutte abbastanza rappresentative.
Per la seconda serie si ha che la moda e la mediana sono 5, mentre la mediana è 5,33 (circa). Lo scarto è 1,66 (circa) per la moda e la mediana ed è circa 2 per la media. Le tre medie sono quindi abbastanza rappresentative (la media aritmetica un po' meno).

Esercizio 7.16: Rispetto alle seguenti serie di dati:
Prima serie: 10 – 10 – 11 – 10 – 12 – 10– 11 – 81; Seconda serie: 1 – 0– 3 – 0 – 2 – 0 – 0 – 2
Procedere come nell'esercizio precedente.

Soluzione:
Per la prima serie si ha che la moda è 10, la mediana è 10,5 e la media è 19,375 . Lo scarto è 9,375 sia per la moda che per la mediana, mentre per la media è (circa) 13,22 . In tutti i casi lo scarto è alto e le medie non sono molto significative. Si può osservare che ciò è dovuto alla presenza del dato "anomalo" 81 (rispetto agli altri della serie). Eliminando quel dato le medie diverrebbero tutte significative.

Per la seconda serie si ha che la moda è 0, la mediana è 0,5 e la media aritmetica è 1. Gli scarti sono di 1 rispetto alla moda, alla mediana e anche alla media aritmetica, che risultano tutte abbastanza significative. Considerando lo scarto quadratico medio si vede che la media aritmetica risulta più significativa.

Capitolo 8

Esercizio 8.1: Sia *ABCD* un rettangolo, con i lati *AB* di 24 *cm* , e *AC* di 32 *cm.* Determinare l'area del triangolo *ABC* e la lunghezza dell'altezza relativa alla sua ipotenusa.

Soluzione:
L'area del rettangolo è di $24 \times 32 = 768\ cm^2$, quindi l'area di *ABC*, che è la sua metà, misura **$384\ cm^2$**. L'ipotenusa di *ABC*, pari alla diagonale del rettangolo, ha quadrato (per il teorema di Pitagora) pari a $24^2 + 32^2 = 576 + 1024 = 1600\ cm^2$, quindi l'ipotenusa misura $40cm$. L'area di *ABC* è pari anche al prodotto dell'ipotenusa per l'altezza h ad essa relativa, fratto 2 ; cioè: $384 = 40 \times h/2$, da cui si ricava che $h = 384 \times 2/40 =$ **$19{,}2cm$**.

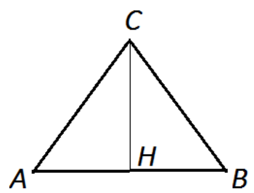
Esercizio 8.2: Dato un poligono regolare avente 5 lati, dire se gli angoli interni del poligono siano acuti, ottusi o retti. Misurano più o meno di 100° ?

Soluzione:
La somma degli angoli interni di un poligono è pari a tanti angoli piatti quanti sono i lati, meno due. Quindi per il pentagono la somma degli angoli interni è $180° \times 3 = 540°$. Poiché i 5 angoli del pentagono sono uguali, misureranno $540 : 3 =$ **108°**.

Esercizio 8.3: Un quadrato ha area 121 cm^2 ed un rettangolo ha i lati di 0,75 e 1,6 *dm* . Quale dei due ha maggior area? E maggior perimetro?

Soluzione:
Il rettangolo ha area di $7{,}5 \times 16 = 120\ cm^2$, minore di quella del quadrato. Il perimetro del rettangolo è di 47*cm*. Il quadrato ha lato di 11 *cm* (poiché $11^2 = 121$) e quindi il suo perimetro è di 44 *cm*, inferiore a quello del rettangolo.

Esercizio 8.4: Sia *ABC* un triangolo isoscele, con il lato *AB* di 36 *cm* e i lati *AC* = *CB* di 3 *dm.* Determinare l'area di *ABC.*

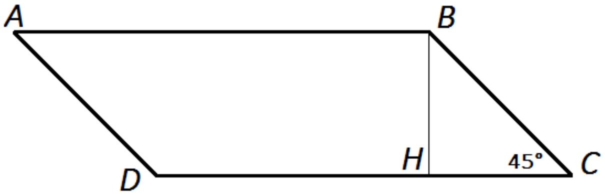


Soluzione:
Abbiamo che l'altezza *AH* di *ABC* sarà un cateto del triangolo *ACH*, e che *AH* è la metà di *AB*, cioè misura 18*cm*. Per il teorema di Pitagora, avremo che il quadrato di *CH* è pari a $AC^2 - AH^2$ e cioè che misura $900 - 324 = 576\ cm^2$. Quindi *CH* misura 24 *cm* e l'area del triangolo è $24 \times 36/2 =$ **$432\ cm^2$**.

Esercizio 8.5: Sia *ABCD* un rettangolo, la cui base *AB* è pari a 8 volte l'altezza *BC.* E' vero che la sua area è pari a quella di un quadrato il cui lato è 4 volte *BC*?

Soluzione:
Abbiamo $AB = 5BC$, quindi l'area del rettangolo è pari a $AB \times BC = 8BC \times BC = 8\ BC^2$. Se un quadrato ha il lato pari a $4BC$, la sua area sarà pari a $(4BC)^2 = 16BC^2$, e cioè il doppio di quella del rettangolo.

Esercizio 8.6: Sia *ABCD* un parallelogramma, con i lati obliqui di $10\sqrt{2}$ *cm ,* la base di 36 *cm* e gli angoli di 45° e 135°. Determinarne l'area e il perimetro.



Soluzione:
ABCD è tale che il triangolo *BHC* in figura è isoscele e metà di un quadrato di cui *BC* è la diagonale, pari quindi a $BH\sqrt{2}$. Quindi il parallelogramma ha altezza *BH* di 10 *cm*, e area 10×36 = **360 cm^2**. Il suo perimetro sarà di $\mathbf{(72+20\sqrt{2})}$ ***cm*** .

Esercizio 8.7: Sia *ABCD* un rombo ottenuto connettendo lungo un loro lato due triangoli equilateri di lato 20 *cm*. Determinare l'area di *ABCD*.

Soluzione:
Un triangolo equilatero di lato *l* si può vedere come composto da due triangoli rettangoli, aventi ipotenusa *l* e cateto minore pari a *l*/2. Avremo allora, per il teorema di Pitagora, che il quadrato del cateto maggiore è pari a $l^2 - (l/2)^2 = l^2 - l^2/4 = (3l^2)/4$, e quindi il cateto maggiore (che è l'altezza del triangolo equilatero) è pari a $(\sqrt{3}l)/2$. Ciò ci dà che l'area del triangolo equilatero è pari a:

$$[(\sqrt{3}l)/4\times l]/2 = (l^2\sqrt{3})/4 .$$

Nel nostro caso tale triangolo (pari a metà del rombo), ha quindi area $(400\sqrt{3})/4 = 100\sqrt{3}cm^2$ e il rombo avrà area **$200\sqrt{3}$ cm^2**.

Esercizio 8.8: Può esistere un triangolo isoscele i cui lati misurano 6 *cm* , 6 *cm* e 12 *cm*?

Soluzione:
NO, infatti la somma dei lati uguali è pari alla base, mentre in un triangolo ogni lato deve essere minore della somma degli altri due.

Esercizio 8.9: Può esistere un triangolo rettangolo i cui lati misurano 10 *cm* , 15 *cm* e 30 *cm*?

Soluzione:
NO, per il teorema di Pitagora dovremmo avere $10^2 + 15^2 = 30^2$, che non è verificato.

Esercizio 8.10: Può esistere un triangolo rettangolo i cui lati misurano 5 *cm* , 12 *cm* e 13 *cm*?

Soluzione:
Sì: poiché ogni lato è minore della somma degli altri due un triangolo con tali lati esiste, ed è un triangolo rettangolo per l'inverso del teorema di Pitagora, in quanto si ha che $12^2 + 5^2 = 13^2$.

Capitolo 9

Esercizio 9.1: Una piramide a base quadrata ha altezza h = 2,5 *m* e lato di base l = 60 *cm*. Contiene più o meno acqua di un cassone cubico con il lato di un metro?

Soluzione:
L'area di base della piramide sarà di 60×60 = 3600cm^2 . Quindi il suo volume sarà dato da:

$$3600 \times 250/3 = 300000\ cm^3 = 0{,}3\ m^3 .$$

Poiché il cassone ha il volume di 1 m^3 , contiene più acqua.

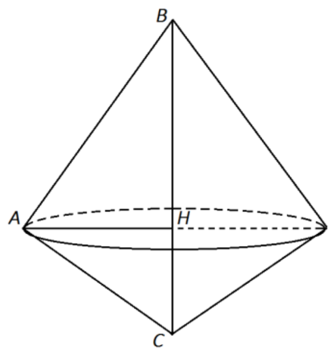
Esercizio 9.2: Una cisterna cilindrica che ha altezza h = 1,5 *m* e raggio di base l = 40 *cm* è piena di acqua. Quanti secchi con altezza di 50 *cm* e raggio di base di 20 *cm* si possono riempire con l'acqua della cisterna?

Soluzione:
Il volume della cisterna sarà di $\pi r^2 h$, pari a $\pi \times 1600 \times 150\ cm^3$. Il volume di un secchio è $\pi (r')^2 h'$, pari a $\pi \times 400 \times 50\ cm^3$. Il numero dei secchi che si possono riempire è pari al rapporto fra i due volumi, e cioè
$\pi \times 1600 \times 150 / \pi \times 400 \times 50 = 4 \times 3 =$ **12**.

Esercizio 9.3: Considerare il triangolo rettangolo *ABC* i cui cateti *AB* e *AC* misurano 12 *cm* e 9 *cm* . Determinare il volume e la superficie totale dei due solidi ottenuti facendo ruotare *ABC* di 360° attorno al cateto minore e attorno al cateto maggiore.

Soluzione:
In entrambi i casi il solido ottenuto è un cono. L'ipotenusa *BC* misura 15cm (si ricava dal teorema di Pitagora). Quando si ruota intorno ad *AC*, il cono ha altezza *AC* e raggio di base *AB*, mentre *BC* sarà l'apotema del cono. Quindi il volume sarà di $\pi \times 144 \times 9/3 =$ **$432\pi\ cm^3$.** La sua superficie totale sarà la somma di quella laterale e dell'area di base, e cioè: $\pi \times 12 \times 15 + \pi \times 144 =$ **$324\ \pi\ cm^2$**.
Il secondo cono avrà invece altezza *AB* e raggio di base *AC* (e la stessa apotema). Allora il suo volume sarà di $\pi \times 81 \times 12/3 =$ **$324\pi\ cm^3$.** La sua superficie totale sarà la somma di quella laterale e dell'area di base, e cioè: $\pi \times 9 \times 15 + \pi \times 81 =$ **$216\ \pi\ cm^2$**.

Esercizio 9.4: Considerare il triangolo rettangolo dell'esercizio precedente. Determinare il volume e la superficie totale del solido ottenuto facendo ruotare *ABC* di 360° attorno all'ipotenusa *BC*.



Soluzione:
In questo caso il solido ottenuto è l'unione di due coni, uniti per la loro base (uguale). Il raggio di base di entrambi è *AH*, l'altezza relativa all'ipotenusa del triangolo, mentre le loro altezze sono pari alle proiezioni *BH* e *HC* dei cateti sull'ipotenusa e la loro apotema è data, rispettivamente, da *AB* e *AC*. L'area del triangolo è 12×9/2 = 54 cm^2 , quindi avremo che *AH* è pari a 54×2/15 = 7,2 *cm* .
Avremo poi (dal teorema di Pitagora), che

$$\overline{BH} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{144 - 51{,}84} = \sqrt{92{,}16} = 9{,}6\ cm$$
$$\overline{HC} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{81 - 51{,}84} = \sqrt{29{,}16} = 5{,}4\ cm$$

Notiamo che *BH* e *HC* si potevano ricavare anche dalle proporzioni:

BH : *AH* = *AB* : *AC* e *HC* : *AH* = *AC* : *AB* ,

in quanto i triangoli *ABC, AHB* e *AHC* sono tutti simili (avendo gli angoli uguali).
Il volume del cono superiore nella figura sarà di π×51,84×9,6/3 = **165,888π cm^3** , mentre la sua superficie laterale sarà pari a : π×7,2×12 = **86,4 π cm^2** .
Il volume del cono inferiore nella figura sarà di π×51,84×5,4/3 = **93,312π cm^3** , mentre la sua superficie laterale sarà pari a : π×7,2×9 = **64,8 π cm^2** .
Avremo quindi che il volume totale del cono sarà: 165,888π + 93,312π cm^3 = **259,2 cm^3**, mentre la sua superficie totale sarà: 86,4 + 64,8 π cm^2 = **151,2 π cm^2** .

Esercizio 9.5: Un parallelepipedo ha i lati di 6 *cm*, 8 *cm* e 24 *cm*. Quanto misura la sua diagonale?

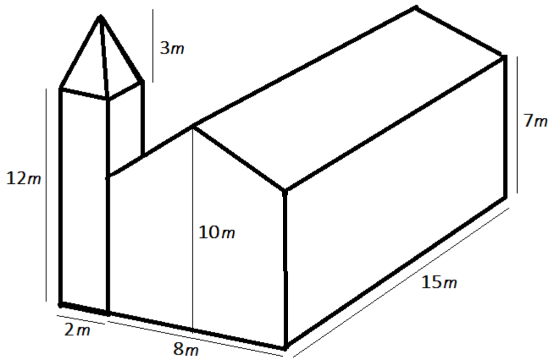
Soluzione:
La diagonale della faccia di lati 6 *cm* e 8 *cm* misura 10 *cm* (dal teorema di Pitagora). La diagonale del parallelepipedo misurerà:

$$\sqrt{10^2 + 24^2} = \sqrt{676} = \mathbf{26}\ cm.$$

Esercizio 9.6: Dire quali delle seguenti definizioni descrivono due rette sghembe nello spazio:
1) Due rette non complanari.
2) Due rette che non si incontrano.
3) Due rette che giacciono su due piani diversi.
4) Due rette tali che non esiste un piano che le contiene entrambe.
5) Due rette passanti per due punti diversi.
6) Due rette che non sono parallele ma non si incontrano.

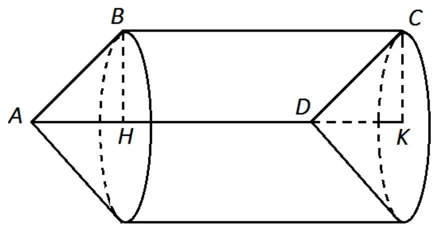
Soluzione:
Le definizioni 1) , 4) e 6) descrivono due rette complanari.

Esercizio 9.7: Considerate la chiesa in figura, con annesso campanile a base quadrata. Qual è il volume dell'intero edificio? Qual è la superficie del tetto della chiesa?



Soluzione:
Il volume è dato dalla somma dei vari volumi:
Campanile (prisma a base quadrata): 2×2×12 = 48 m^3 ;
Tetto del campanile (piramide a base quadrata): 2×2×3/4 = 4 m^3 ;
Corpo della chiesa (parallelepipedo): 8×15×7 = 840 m^3 ;
Tetto della chiesa (prisma a base triangolare): 8×15×3/2 = 180 m^3 ;
Volume totale: 48+4+840+180 = **1172 m^3 .**
Il tetto della chiesa è formato da due rettangoli uguali, con il lato maggiore di 15 *m* e il minore di 5 *m*, ricavato dal teorema di Pitagora applicato al triangolo dato da metà frontone superiore della chiesa, di cateti pari a 3 e 4 *m*. Quindi la superficie del tetto è di 2×5×15 = **150 m^2** .

Esercizio 9.8: Considerare il solido formato dalla rotazione del parallelogramma *ABCD* attorno al lato *AD*: sapendo che *AD* misura 15 *cm* , l'altezza *BH* misura 5 *cm* e l'angolo in *A* è di 45°, determinare il volume e la superficie totale del solido ottenuto.



Soluzione:
Il solido è formato dal cilindro di altezza *BC* e raggio di base *BH*, sormontato dal cono *ABH* e scavato dal cono *DCK* (uguale al precedente). Il suo volume è quindi pari a quello del cilindro, e cioè:

$$\pi\times 25\times 15 = \mathbf{375\pi}\ cm^3.$$

La superficie del solido è pari alla somma della superficie laterale del cilindro più due volte quella del cono. La prima misura $2\pi\times 5\times 15 = 150\pi\ cm^2$. Per il cono abbiamo che l'apotema è pari a $5\sqrt{2}$, in quanto *AB* è la diagonale del quadrato di lato *BH*. Quindi la superficie laterale del cono è di $\pi\times 5\times 5\sqrt{2} = 25\pi\sqrt{2}\ cm^2$. La superficie totale del solido sarà allora: $150\pi + 50\pi\sqrt{2} = \mathbf{50\pi(3+\sqrt{2})}\ cm^2$.

Esercizio 9.9: Considerare le rette dello spazio individuate dagli spigoli di un cubo. Ce ne sono di parallele, di perpendicolari, di sghembe?

Soluzione:
Ognuna di tali rette ne ha 3 delle altre che le sono parallele, 4 che le sono perpendicolari e 5 sghembe.

Esercizio 9.10: Considerare un prisma che abbia per base un triangolo rettangolo con l'ipotenusa di 15 *cm* e un cateto di 12 *cm*. L'altezza del prisma è 2/3 dell'altro cateto. Determinare volume e superficie totale del prisma.

Soluzione:
Tramite il teorema di Pitagora, si ha che il cateto mancante misura 9 *cm*, e quindi l'altezza del prisma è pari a 2/3×9 = 6 *cm*. Quindi il volume del prisma risulterà:
[(12×9)/2] ×6 = **324 cm^3** .
Mentre la superficie totale è pari a quella laterale più il doppio dell'area di base, e cioè:
(12+9+15] ×6 + 2[(12×9)/2] = 216 + 108 = **324 cm^2** .

Capitolo 10

Esercizio 10.1: Considerare la retta *r* nel piano cartesiano avente equazione: $7x + 8y - 1 = 0$.
a) determinare se il punto $P = (1;2)$ appartiene a *r* ;
b) la retta di equazione $7x + 9y + 7 = 0$ è parallela a *r* ?

Soluzione:
a) Il punto *P* ha coordinate che non soddisfano l'equazione di *r* (infatti $7 + 16 - 1 \neq 0$) e quindi non le appartiene.
b) La retta *r* ha coefficiente angolare $-7/8$, diverso da quello della retta in oggetto (che è $-7/9$). Quindi le due rette non sono parallele.

Esercizio 10.2: Dati i punti $A = (2, -1)$ e $B = (5,3)$. Determinare l'equazione della retta per *A* e *B* e la lunghezza del segmento *AB*.

Soluzione:
La retta per *A* e *B* ha equazione: $\frac{x-2}{5-2} = \frac{y-(-1)}{3-(-1)}$, cioè $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4}$, che dà $\mathbf{4x - 3y - 11 = 0}$.
Il segmento *AB* ha lunghezza:

$$\overline{AB} = \sqrt{(2-5)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = \mathbf{5} .$$

Esercizio 10.3: Dati i punti $A = (2, -1)$ e $B = (5, -1)$. Determinare l'equazione della retta per *A* e *B* e la lunghezza del segmento *AB*.

Soluzione:
La retta per *A* e *B* ha equazione: $\mathbf{y = -1}$, poiché i due punti sono allineati in verticale (hanno la stessa coordinata *y*). Il segmento *AB* ha lunghezza: 5 – 2 = **3.**

Esercizio 10.4: Data la retta r di equazione: $3x + 4y - 2 = 0$, e il punto $P = (1, -1)$, determinare la retta s passante per P e parallela ad r, e la retta t passante per P e perpendicolare a r.

Soluzione:
La retta r ha coefficiente angolare pari a $-3/4$. La retta s avrà lo stesso coefficiente angolare, mentre la retta t avrà coefficiente angolare pari a $4/3$.
Le rette per P hanno tutte equazione $y - (-1) = m(x-1)$.
Allora la retta s avrà equazione: $y - (-1) = -3/4(x - 1)$, che dà $\mathbf{3x + 4y + 1 = 0}$, mentre la retta t avrà equazione: $y - (-1) = 4/3\,(x-1)$, che dà $\mathbf{4x - 3y - 7 = 0}$.

Esercizio 10.5: I punti $A = (2, -1)$, $B = (1,1)$ e $C = (0,3)$, sono allineati?

Soluzione:
La retta per A e B ha equazione: $\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-1}{-1-1}$, cioè $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-2}$, che dà $2x + y - 3 = 0$. E' facile vedere che C soddisfa tale equazione, e quindi i tre punti sono allineati.

Esercizio 10.6: Determinare l'equazione della circonferenza di centro l'origine e raggio = 4. Dati i punti $P = (2,3)$ e $Q = (1,4)$, dire se siano interni o esterni alla circonferenza data.

Soluzione:
La circonferenza è data dai punti aventi distanza 4 dall'origine, e cioè dai punti $A = (x,y)$ tali che:

$$\overline{AO} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = 4\,.$$

La sua equazione è quindi: $\mathbf{x^2 + y^2 = 16}$. Per il punto P abbiamo: $x^2 + y^2 = 2^2 + 3^2 = 13 < 16$, e per il punto Q: $x^2 + y^2 = 1^2 + 4^2 = 17 > 16$; quindi il primo è interno alla circonferenza (dista meno di 4 dall'origine), mentre il secondo è esterno.

Esercizio 10.7: Data la retta r di equazione $3x + 4y - 5 = 0$, sia P un punto di coordinate $(1,y)$.
Determinare quanto deve valere y perché P appartenga ad r.

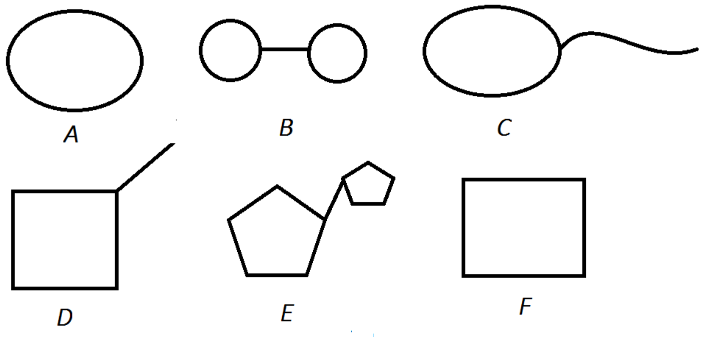
Soluzione:
Perché P appartenga a r, le sue coordinate devono soddisfarne l'equazione, quindi si deve avere:
$3(1) + 4y - 5 = 0$, cioè $4y = 5 - 3 = 2$, e quindi $\mathbf{y = 1/2}$.

Esercizio 10.8: Data la retta r di equazione $y = 2x + 6$, dire quali fra le seguenti rette siano parallele o perpendicolari a r (se ce ne sono):

$$x + 2y - 5 = 0;\ \ 2x - y - 1 = 0;\ \ 3x + 6y - 2 = 0;\ \ y = 4x + 12\,;\ \ 4x - y - 10 = 0;$$
$$y = \frac{2}{3}x + 2\,;\ \ y = \frac{8}{4}x + 7\,;$$

Soluzione:
Il coefficiente angolare di r è 2; quindi rette parallele lo avranno uguale, mentre quelle perpendicolari avranno coefficiente angolare pari a $-1/2$. Allora sono parallele a r la seconda e la sesta retta, mentre sono perpendicolari a r la prima e la terza retta.

Esercizio 10.9: Quali fra le seguenti figure sono topologicamente equivalenti?



Soluzione:
Sono topologicamente equivalenti la A e la F, la B e la E, la C e la D.

Esercizio 10.10: Quali fra le lettere dell'alfabeto seguenti sono topologicamente equivalenti:
A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V X Y W Z .

Soluzione:
Le classi di lettere topologicamente equivalenti sono:
{A, R} ; {B} ; { C, G, I, J, L, M, N, S, U, V, W, Z } ; {D, O} ; {E, F, T, Y} ; {H} ; {P, Q} ; {K, X} .

Appendice A

Esercizio A.1: L'enunciato $(A \wedge B) \Rightarrow A$ è una tautologia?

Soluzione:
Sì, infatti se A è falsa , anche $(A \wedge B)$ è falsa, quindi l'enunciato è vero. Se A è vera, l'enunciato è sempre vero (qualunque sia il valore di B).

Esercizio A.2: Supponiamo di sapere che l'enunciato A sia vero e B sia falso. Qual è allora il valore di verità di $(A \Rightarrow B) \vee (\neg A \vee B)$?

Soluzione:
L'enunciato è falso:

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg A \vee B$	$(A \Rightarrow B) \vee (\neg A \vee B)$
v	f	f	f	f

Esercizio A.3: L'enunciato $(A \wedge B) \Rightarrow (A \wedge C)$ è logicamente equivalente a $B \Rightarrow C$?

Soluzione:
NO. Per esempio se *A* e *C* sono false mentre *B* è vera, il primo enunciato è vero, mentre il secondo è falso.

Esercizio A.4: Considerando la seguente deduzione (vedi sez. A.3), dire se sia valida o meno.

$$A \Rightarrow B$$
$$\underline{B \Rightarrow \neg C}$$
$$\neg A \vee \neg C$$

Soluzione:

A	B	C	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow \neg C$	$\neg A \vee \neg C$
v	v	v	v	f	f
v	f	v	f	v	f
f	v	v	v	f	v
f	f	v	v	v	v
v	v	f	v	v	v
v	f	f	f	v	v
f	v	f	v	v	v
f	f	f	v	v	v

Ci sono quattro casi in cui le ipotesi sono vere, e in ognuno di essi anche la conclusione è vera, quindi la deduzione è valida.

Esercizio A.5: Negare le seguenti frasi (usando un diverso quantificatore da quello che appare nella frase stessa).
- Esistono numeri naturali che sono contemporaneamente pari e dispari.
- Tutti i calciatori professionisti sono ricchi.
- Son tutte buone le mamme del mondo.

Soluzione:
- Ogni numero naturale non può essere contemporaneamente pari e dispari.
- Esistono calciatori professionisti che non sono ricchi.
- Esistono mamme al mondo che non sono buone.

Esercizio A.6: Per le seguenti relazioni, individuare quale proprietà, esse abbiano fra quelle considerate per le relazioni: riflessiva, simmetrica, transitiva, antisimmetrica, totale:

$R = \{ (x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mid x = y \vee x = -y \}$; $R = \{ (x,y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid x + y$ è pari $\}$;
$R = \{ (x,y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid x-y$ è divisibile per 3 $\}$; $R = \{ (x,y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid x < 3 \wedge y > 2 \}$;
$R = \{ (x,y) \in \mathbb{Q}\times\mathbb{Q} \mid y = 1/x\}$.

Soluzione:

$R = \{ (x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mid x = y \lor x = -y \}$: è riflessiva, è simmetrica, è transitiva, non è antisimmetrica (è simmetrica), non è totale (ad esempio non vale $1R2$ né $2R1$).
$R = \{ (x,y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid x + y$ è pari $\}$: è riflessiva ($x+x = 2x$ che è sempre pari), è simmetrica (se $x + y$ è pari anche $y + x$ lo è), è transitiva, non è antisimmetrica (è simmetrica), non è totale (ad esempio non vale $2R3$ né $3R2$).
$R = \{ (x,y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid x\text{-}y$ è divisibile per 3 $\}$: si può notare che due numeri sono in relazione se e solo danno lo stesso resto se divisi per 3. Quindi la relazione è riflessiva, è simmetrica, è transitiva, non è totale.
$R = \{ (x,y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid x < 3 \land y > 2 \}$: Non è riflessiva (ad esempio non vale 3R3), non è simmetrica (vale $2R4$, ma non $4R2$), è transitiva (in modo vuoto, se vale aRb non può valere bRc per nessun c), non è antisimmetrica (non vale mai aRa) e non è totale.
$R = \{ (x,y) \in \mathbb{Q}\times\mathbb{Q} \mid y = 1/ x \}$: Non è riflessiva (non vale ad esempio $3R3$), non è transitiva (vale $2R1/2$ e $1/2R2$, ma non $2R2$), è antisimmetrica (se valgono xRy e yRx *, allora* x=y=1), non è totale (non vale $1R2$ né $2R1$).

Esercizio A.7: Per le seguenti relazioni, verificare che sono di equivalenza ed individuare l'insieme quoziente rispetto alla partizione da esse definita:
$R = \{ (x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mid x = y \lor x = -y \}$; $R = \{ (x,y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid x + y$ è pari $\}$;
$R = \{ (x,y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid x\text{-}y$ è divisibile per 3 $\}$.

Soluzione:
Le relazioni sono di equivalenza (vedi esercizio precedente).
$R = \{ (x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mid x = y \lor x = -y \}$: ci sono tre classi, date dai numeri positivi, quelli negativi e lo zero.
$R = \{ (x,y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid x + y$ è pari $\}$: ci sono due classi, date dai numeri pari e da quelli dispari.
$R = \{ (x,y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid x\text{-}y$ è divisibile per 3 $\}$: due numeri sono in relazione se e solo danno lo stesso resto se divisi per 3. Quindi ci sono tre classi: $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\ \mathbf{2}\}$, corrispondenti alle classi di resto modulo tre.

Esercizio A.8: Data la funzione f: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definita da $f(x) = 2x +3$, scrivere la relazione R che la definisce ($R \subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N}$) . La f è biunivoca?

Soluzione:
La relazione è $R = \{(x,y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid y = 2x + 3\}$. La f non è biunivoca: ad esempio non esiste una x tale che $f(x) = 0$.

Esercizio A.9: Per le seguenti relazioni, dire se sono di equivalenza ed in quel caso individuare l'insieme quoziente rispetto alla partizione da esse definita:
a) R nell'insieme A degli animali, ove: $R = \{(x,y) \in A\times A \mid x$=$y$, oppure x e y sono entrambi ovipari$\}$.
b) R nell'insieme A degli indumenti, ove: $R = \{(x,y) \in A\times A \mid x$ e y sono fatti dello stesso tessuto$\}$.
c) R nell'insieme A degli umani, ove: $R = \{(x,y) \in A\times A \mid x$ e y hanno la stessa lingua madre$\}$.
d) R nell'insieme A degli animali, ove: $R = \{(x,y) \in A\times A \mid x$ è preda di $y \}$.

Soluzione:
a) R è di equivalenza, e le classi sono due: $\{x\in A \mid x$ è oviparo$\}$, $\{x\in A \mid x$ non è oviparo$\}$.
b) R è di equivalenza, e le classi sono : $\{x\in A \mid x$ è di lana$\}$, $\{x\in A \mid x$ è di cotone$\}$, $\{x\in A \mid x$ è di lino$\}$, ecc.

c) *R* è di equivalenza, e le classi sono : $\{x \in A \mid x$ parla italiano$\}$, $\{x \in A \mid x$ parla francese$\}$, $\{x \in A \mid x$ parla inglese$\}$, ecc.
d) *R* non è di equivalenza.

Esercizio A.10: Nel seguente insieme

$$A = \{3^{-2},\ \sqrt{8},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{\sqrt{81}},\ \sqrt[3]{2^{10}},\ \frac{6\sqrt{2}}{3},\ 2\sqrt{2},\ 2^3\sqrt[3]{2},\ \sqrt{7},\ \pi,\ \left(\sqrt[3]{2^2}\right)^5,\ \sqrt{\frac{175}{25}}\ \},$$

considerare la relazione: $R = \{(x,y) \in A \times A \mid y = x\}$. Dimostrare che *R* è di equivalenza e determinare le classi della partizione associata.

Soluzione:
La relazione è banalmente di equivalenza, trattandosi di un'uguaglianza. Le sue classi di equivalenza sono:

$$\{3^{-2}, \frac{1}{9}, \frac{1}{\sqrt{81}}\},\ \{\sqrt[3]{2^{10}}, 2^3\sqrt[3]{2}, \left(\sqrt[3]{2^2}\right)^5\},\ \{\sqrt{8}, 2\sqrt{2}\},\ \{\sqrt{7}, \frac{6\sqrt{2}}{3}, \sqrt{\frac{175}{25}}\},\ \{\pi\}.$$