

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>IX</b>
<b>1 Il Problema di Apollonio</b>	<b>3</b>
1.1 Apollonio e il problema da lui posto	3
1.2 L’inversione circolare	4
1.2.1 La definizione di inversione circolare	4
1.2.2 Le principali proprietà della inversione circolare	6
1.2.3 L’espressione analitica	10
1.2.4 La proiezione stereografica	11
1.3 Risoluzione del Problema di Apollonio con l’inversione circolare	12
1.3.1 Il caso $(r, r, r)$	13
1.4 I casi del primo gruppo	13
1.4.1 Il caso $(p, p, p)$	13
1.4.2 Il caso $(p, p, r)$	15
1.4.3 Il caso $(p, p, c)$	16
1.4.4 Il caso $(p, r, r)$	16
1.4.5 Il caso $(p, r, c)$	20
1.4.6 Il caso $(p, c, c)$	21
1.5 I casi del terzo gruppo	22
1.5.1 La dilatazione parallela	22
1.5.2 Il caso $(r, r, c)$	24
1.5.3 Il caso $(r, c, c)$	25
1.5.4 Il caso $(c, c, c)$	26
1.6 Un primo riassunto dei risultati ottenuti	34
1.7 L’approccio algebrico-cartesiano	34
1.8 Un approccio algebrico-geometrico enumerativo	36
1.9 Un po’ di storia	36
1.9.1 La soluzione di van Roomen	36
1.9.2 L’obiezione di Viète e la sua soluzione	40
1.9.3 Il Teorema di Descartes	41
1.10 Sviluppi più recenti	46
1.10.1 Sulle tracce di Descartes	46
1.10.2 Il Fregio di Apollonio (Apollonian Gasket)	47

<b>2</b>	<b>Le basi della moderna crittografia</b>	<b>53</b>
2.1	Cosa è la crittografia	53
2.1.1	I primordi della crittografia	53
2.2	Le basi della crittografia	54
2.2.1	Aritmetica modulare	54
2.2.2	Crittosistemi	56
2.2.3	Crittoanalisi	58
2.3	Far di conto	59
2.3.1	Scrittura posizionale dei numeri e operazioni	59
2.3.2	Algoritmi e complessità	61
2.3.3	Numeri primi	63
2.3.4	L'algoritmo AKS	64
2.4	Moderni sviluppi della crittografia	65
2.4.1	Crittografia a chiave pubblica	65
2.4.2	Crittosistema RSA	66
2.5	Metodi algebrico-geometrici in crittografia	69
2.5.1	Curve ellittiche	69
2.6	La crittografia verso il futuro	70
2.6.1	Cifrari di Vernam (one time pad)	70
2.6.2	Crittografia quantistica	72
<b>3</b>	<b>Teorema di Pitagora, aree e volumi</b>	<b>77</b>
3.1	Il Teorema di Pitagora	77
3.1.1	Dimostrazione algebrica	77
3.1.2	Dimostrazione per affettamento	78
3.1.3	Dimostrazione per similitudine	81
3.1.4	Inverso del Teorema di Pitagora	82
3.2	Aree e volumi	84
3.2.1	Principio di Cavalieri	84
3.2.2	Aree di triangoli e volumi di piramidi	84
3.2.3	Circonferenze, cerchi e sfere	86
3.2.4	Il Teorema di Archimede	87
<b>4</b>	<b>Un po' di teoria dei numeri</b>	<b>91</b>
4.1	Infinità dei numeri primi	91
4.1.1	Numeri di Fermat	91
4.1.2	Numeri di Mersenne	92
4.1.3	La dimostrazione di Euler	93
4.1.4	Un'altra dimostrazione di Euler	95
4.1.5	I primi congrui a 3 modulo 4	96
4.1.6	La dimostrazione di Furstenberg	96
4.1.7	Il Teorema di Dirichlet	97
4.2	Equazioni diofantee	97
4.2.1	Equazioni diofantee di primo grado	98
4.2.2	Equazioni diofantee di secondo grado	99

4.2.3	Punti razionali su una conica e terne pitagoriche primitive	99
4.2.4	Equazioni diofantee di grado superiore al secondo	101
4.3	Il Problema di Fermat	102
4.3.1	Dimostrazione del Teorema 4.15: primo passo	102
4.3.2	Dimostrazione del Teorema 4.15: secondo passo	104
4.3.3	Dimostrazione del Teorema 4.15: terzo passo	107
4.3.4	Considerazioni finali	108
<b>5</b>	<b>Punti e rette nel piano, grafi e superficie</b>	<b>111</b>
5.1	Il Problema di Sylvester	111
5.2	Interludio: gli assiomi della geometria euclidea del piano	116
5.3	Il Teorema di Sylvester-Gallai: un approccio assiomatico	119
5.3.1	Il piano di Fano	119
5.3.2	Il piano complesso e il Teorema di Menelao	120
5.3.3	Piani affini su campi	124
5.4	Cenni al Problema di Sylvester nello spazio	126
5.5	Variazioni sul tema	129
5.6	Grafi	133
5.6.1	Generalità	133
5.6.2	Teorema di Motzkin-Conway rivisitato	136
5.6.3	La formula di Euler	138
5.6.4	Grafi platonici	141
5.6.5	Colorazione dei grafi	144
5.6.6	Il Teorema di Sylvester-Gallai rivisitato	145
5.6.7	Grafi percorribili	147
5.6.8	Applicazioni della teoria dei grafi	149
5.7	Superficie	151
5.7.1	Superficie connesse, compatte, bilatere	151
5.7.2	Grafi su superficie connesse, compatte e orientabili	155
5.7.3	Il piano proiettivo	158
5.7.4	Ancora sul Teorema di Sylvester-Gallai	162
<b>6</b>	<b>Pensare proiettivo</b>	<b>165</b>
6.1	Introduzione	165
6.2	Lo spazio proiettivo	167
6.3	La prospettiva	169
6.3.1	Cos'è la prospettiva?	169
6.3.2	Un po' di storia	172
6.4	Gnomonica e cartografia	185
6.4.1	Orologi solari	185
6.4.2	Meridiane	186
6.4.3	Cartografia	187
6.5	Torniamo alla geometria proiettiva	190
6.5.1	La risposta di Enriques	190
6.5.2	Un breve sunto di storia della geometria proiettiva	191

6.5.3	L'approccio assiomatico alla geometria proiettiva	192
6.5.4	I teoremi di Desargues e di Pappo	193
6.5.5	Algebra geometrica	198
6.5.6	Pavimentazioni e colonnati	200
6.6	È possibile realizzare un modello del piano proiettivo reale?	204
<b>7</b>	<b>Cosa significa classificare</b>	<b>207</b>
7.1	Introduzione	207
7.2	Il concetto di classificazione	207
7.2.1	Definizione di classificazione	207
7.2.2	Gli aspetti matematici basilari del concetto di classificazione	208
7.3	Classificazione in biologia e nelle scienze naturali	209
7.3.1	Antichità e Medioevo	209
7.3.2	Dal Rinascimento a Linneo	210
7.3.3	Da Darwin in poi	211
7.4	Classificazione in matematica	213
7.4.1	I problemi del millennio	213
7.4.2	Cosa significa classificare in matematica?	214
7.4.3	Il Programma di Erlangen	218
7.4.4	Classificare la matematica?	231
	<b>Bibliografia</b>	<b>233</b>
	<b>Indice analitico</b>	<b>237</b>